MATEMATIKA – PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

Parametrický popis křivek

1 Je dána křivka $k(t) = [t^2 - t + 2 \,;\, t^3 - 3t]$, $t \in \mathbb{R}$.

Nakreslete část křivky k pro $t \in \langle -3 \,;\, 3\rangle$. Napište rovnice tečen křivky v bodech $k(-1)$, $k(1)$ a $k(2)$.

Řešení

Dosazením několika hodnot parametru t získáme souřadnice bodů křivky k.

Dále vypočteme souřadnice průsečíků s osami x a y. Průsečík křivky s osou x je bod, jehož y-ová souřadnice je nulová. Řešíme rovnici

$$P_x: \quad t^3 - 3t = 0.$$

Řešení jsou tři, $t \in \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. Průsečíky s osou x jsou body $k(0) = [2 \,;\, 0]$, $k(\sqrt{3}) = [5 - \sqrt{3} \,;\, 0]$, $k(-\sqrt{3}) = [5 + \sqrt{3} \,;\, 0]$.

Průsečík křivky s osou y je bod, jehož x-ová souřadnice je nulová. Řešíme rovnici

$$P_y: \quad t^2 - t + 2 = 0.$$

Tato rovnice nemá reálné kořeny, tedy křivka neprotíná osu y.

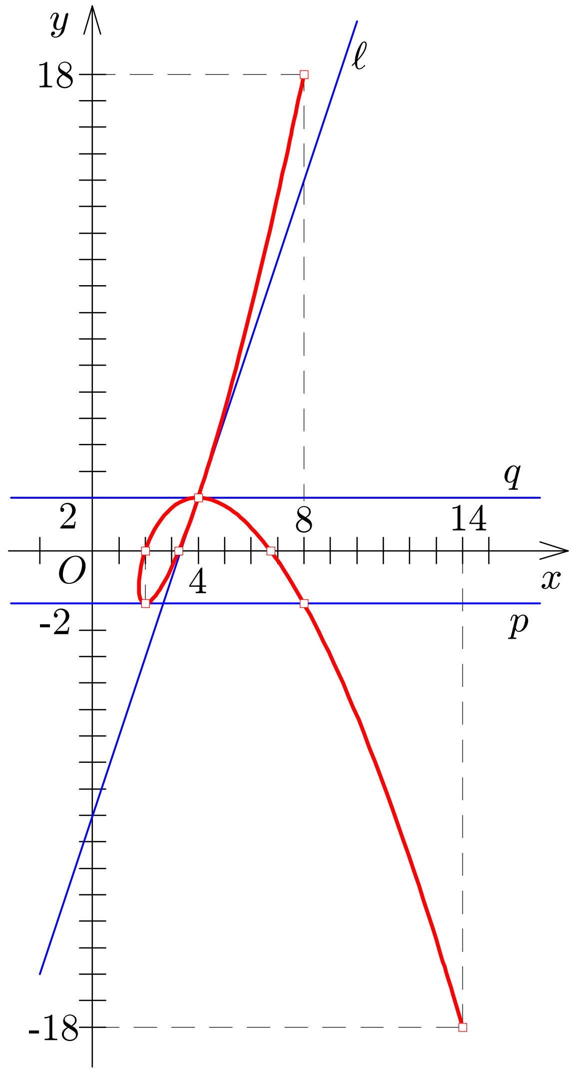
Směrové vektory tečen křivky k získáme derivováním křivky k po souřadnicích:

$$u(t) = k'(t) = (2t - 1 \,;\, 3t^2 - 3).$$

V bodě $k(1) = [2 \,;\, -2]$ má křivka tečnu p se směrovým vektorem $u(1) = (1 \,;\, 0)$ a parametrickým předpisem:

$$\begin{aligned} p: \; x &= 2 + s \\ y &= -2, \qquad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky p je $y = -2$.



V bodě $k(-1) = [4 \,;\, 2]$ má křivka tečnu q se směrovým vektorem $u(-1) = (-3 \,;\, 0)$ a parametrickým předpisem:

$$\begin{aligned} q: \; x &= 4 - 3s \\ y &= 2, \qquad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky q je $y = 2$.

V bodě $k(2) = [4 \,;\, 2]$ má křivka tečnu ℓ se směrovým vektorem $u(2) = (3 \,;\, 9)$ a parametrickým předpisem:

$$\begin{aligned} \ell: \; x &= 4 + s \\ y &= 2 + 3s, \qquad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky ℓ je $y - 3x + 10 = 0$.

2 Je dána křivka (elipsa) $k(t) = [4\cos(t)\ ;\ 3\sin(t)]$, $t \in \langle 0\ ;\ 2\pi\rangle$.

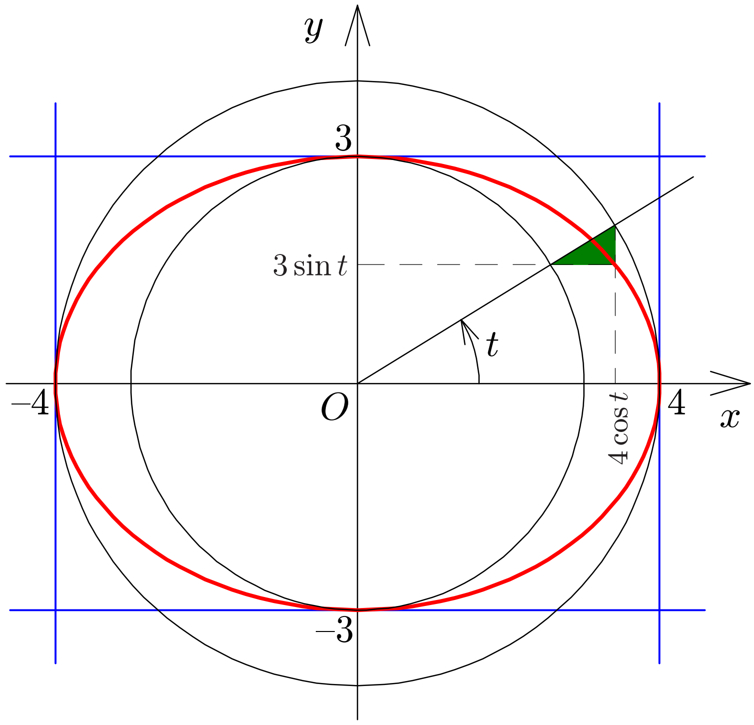
Nakreslete elipsu k. Napište rovnice tečen ve vrcholech elipsy.

Řešení

Křivka $[4\cos(t)\ ;\ 4\sin(t)]$ je kružnice se středem v bodě $[0\ ;\ 0]$ a poloměrem 4.

Křivka $[3\cos(t)\ ;\ 3\sin(t)]$ je kružnice se středem v bodě $[0\ ;\ 0]$ a poloměrem 3.

Bod zadané elipsy k pro konkrétní hodnotu parametru t (zde orientovaný úhel) tedy můžeme sestrojit trojúhelníkovou konstrukcí elipsy.



Tečné vektory křivky k jsou

$$u(t) = (-4\sin(t)\ ;\ 3\cos(t)),\ t \in \langle 0\ ;\ 2\pi\rangle$$

Vrcholy elipsy a rovnice tečen v těchto bodech:

$t = 0$	$k(0) = [4\ ;\ 0]$	$x = 4$,
$t = \frac{\pi}{2}$	$k(\frac{\pi}{2}) = [0\ ;\ 3]$	$y = 3$,
$t = \pi$	$k(\pi) = [-4\ ;\ 0]$	$x = -4$,
$t = \frac{3\pi}{2}$	$k(\frac{3\pi}{2}) = [0\ ;\ -3]$	$y = -3$.

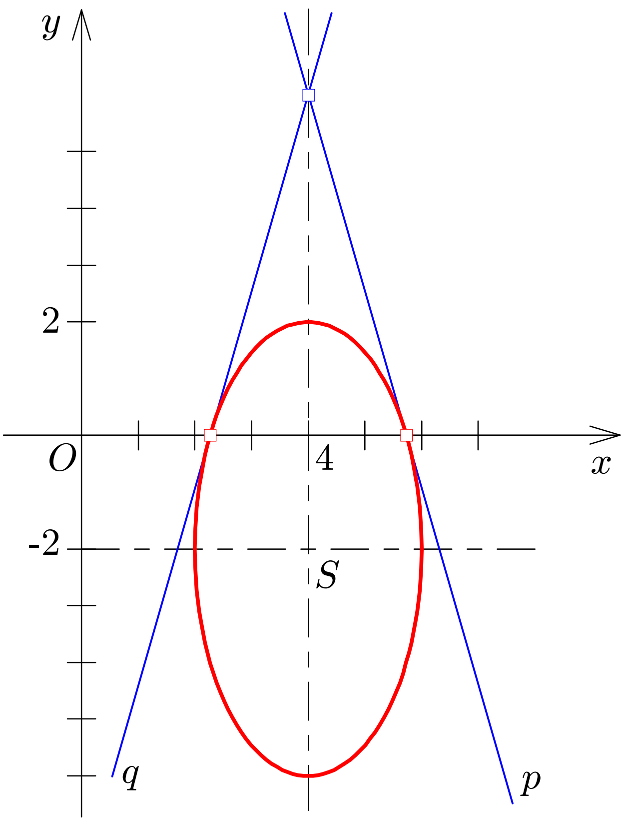
3 Napište parametrické vyjádření elipsy o středu $S[4\ ;\ -2]$, hlavní osou rovnoběžnou s osou y, velikost hlavní poloosy $a = 4$, velikost vedlejší poloosy $b = 2$.

Vypočítejte souřadnice průsečíků elipsy s osou x a dále vypočítejte souřadnice průsečíku tečen elipsy v těchto bodech.

Řešení

Elipsa má parametrický předpis $k(t) = [4 + 2\cos(t)\ ;\ -2 + 4\sin(t)]$, $t \in \langle 0\ ;\ 2\pi\rangle$.

Hodnoty parametru t průsečíků elipsy s osou x získáme vyřešením rovnice $-2 + 4\sin(t) = 0$. Dosazením řešení rovnice (na daném intervalu) $t_1 = \frac{\pi}{6}$ a $t_2 = \frac{5\pi}{6}$ do předpisu křivky získáme průsečíky s osou x: $k(\frac{\pi}{6}) = [4 + \sqrt{3}\ ;\ 0]$ a $k(\frac{5\pi}{6}) = [4 - \sqrt{3}\ ;\ 0]$.



Tečné vektory elipsy jsou

$$u(t) = (-2\sin t\ ;\ 4\cos t),\ t \in \langle 0\ ;\ 2\pi\rangle.$$

Tečna p elipsy v bodě $k(\frac{\pi}{6})$ má směrový vektor $u(\frac{\pi}{6}) = (-1\ ;\ 2\sqrt{3})$ a parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} p:\ x &= 4 + \sqrt{3} - s \\ y &= 2\sqrt{3} \cdot s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tečny elipsy v jejích průsečících s osou x se protínají na hlavní ose elipsy, což je přímka $x = 4$. Stačí tedy určit souřadnice průsečíku tečny p a hlavní osy elipsy. Průsečík tečen má souřadnice $[4\ ;\ 6]$.

4 Je dána křivka $k(t) = [t^2 - 1 \,;\, t + 1]$, $t \in \mathbb{R}$.

Nakreslete část křivky pro $t \in \langle -4 \,;\, 4 \rangle$.

Křivka je parabola, napište rovnici osy o a řídící přímky d této paraboly.

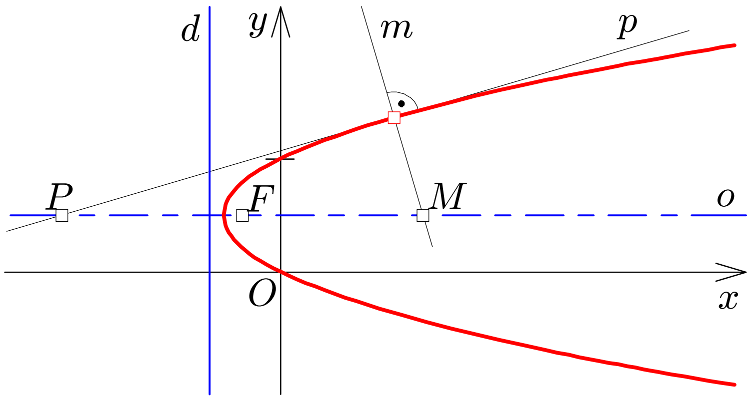
Řešení

Osa paraboly je přímka $o: \ y = 1$, vrchol je bod $V[-1 \,;\, 1]$.

Řídící přímku lze získat z geometrických vlastností paraboly. Věta o subtangentě a subnormále říká, že ohnisko půlí součet subtangenty a subnormály.

Určíme rovnici tečny a normály paraboly ve zvoleném bodě $k(2) = [3 \,;\, 3]$.

Tečné vektory paraboly mají předpis $u(t) = (2t \,;\, 1)$, normálové vektory mají předpis $n(t) = (-1 \,;\, 2t)$.



Tečna p paraboly v bodě $k(2)$ má směrový vektor $u(2) = (4 \,;\, 1)$ a parametrický předpis

$$\begin{aligned} p: \ x &= 3 + 4s \\ y &= 3 + s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Normála m paraboly v bodě $k(2)$ má směrový vektor $n(2) = (-1 \,;\, 4)$ a parametrický předpis

$$\begin{aligned} m: \ x &= 3 - r \\ y &= 3 + 4r, \quad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Průsečík tečny p s osou paraboly je bod $P[-5 \,;\, 1]$, průsečík normály m s osou paraboly je bod $M[\frac{7}{2} \,;\, 1]$.

Ohnisko F paraboly je střed úsečky určené průsečíkem tečny s osou a průsečíkem normály s osou:

$$F = \frac{P + M}{2} = \left[-\frac{3}{4} \,;\, 1 \right].$$

Řídící přímka paraboly je od vrcholu vzdálena stejně jako ohnisko, tedy rovnice řídící přímky d je $x = -\frac{5}{4}$.

5 Je dána šroubovice $k(t) = [4\cos(t), -4\sin(t), 2t]$, $t \in \mathbb{R}$. Osa šroubovice je osa z, šroubovice je levotočivá, redukovaná výška závitu je $v_0 = 2$.

Vypočítejte souřadnice průsečíku tečny šroubovice v bodě $A = k(\frac{\pi}{2})$ s půdorysnou (souřadnicovou rovinou (x,y)).

Řešení

Tečné vektory šroubovice mají předpis:
$u(t) = (-4\sin(t) ; -4\cos(t) ; 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

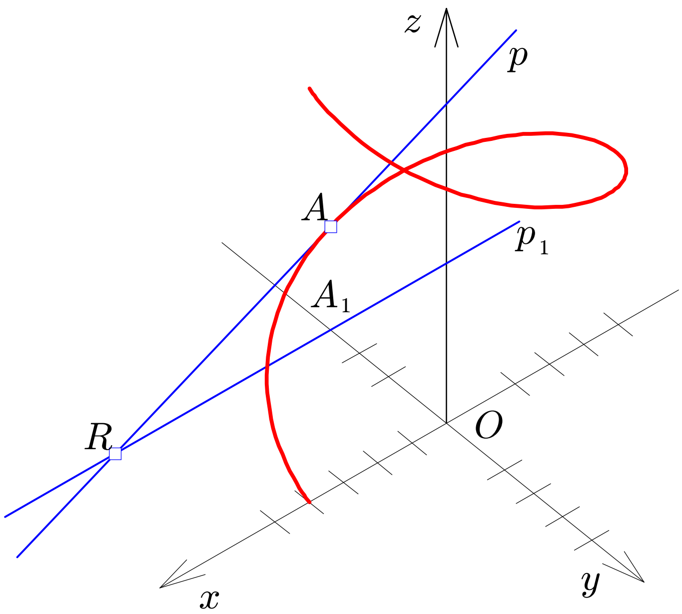
Tečna p šroubovice v bodě $k(\frac{\pi}{2}) = [0 ; -4 ; \pi]$ má směrový vektor $u(\frac{\pi}{2}) = (-4 ; 0 ; 2)$ a rovnice:

$$p: \begin{aligned} x &= -4s \\ y &= -4 \\ z &= \pi + 2s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hodnotu parametru s, která odpovídá průsečíku přímky p s půdorysnou (x,y) zjistíme vyřešením rovnice

$$\pi + 2s = 0.$$

Řešením je $s = -\frac{\pi}{2}$ a průsečík R přímky p s půdorysnou má souřadnice $[2\pi ; -4 ; 0]$.



6 Je dána křivka $k(t) = [t^2 ; t^3]$, $t \in \mathbb{R}$.

Zjistěte, zda jsou na křivce singulární body. Pokud ano, napište jejich souřadnice.

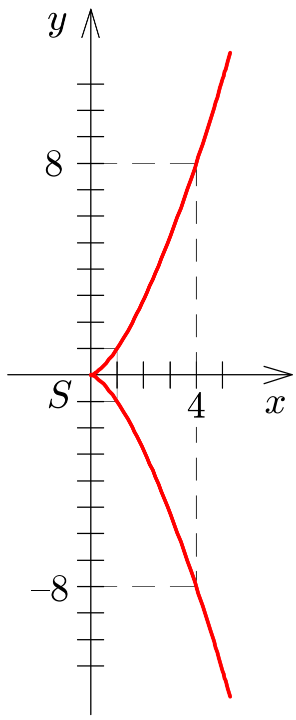
Řešení

Singulární bod křivky je takový bod, ve kterém neexistuje tečna – tečný vektor křivky je nulový nebo neexistuje.

Tečné vektory dané křivky mají předpis $u(t) = (2t ; 3t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Pro hodnotu parametru $t = 0$ je $u(0) = (0 ; 0)$. Je zřejmé, že pro jiné hodnoty parametru tečné vektory existují a nejsou nulové. Tedy jediným singulárním bodem křivky je bod $S = k(0) = [0 ; 0]$.

Poznámka: křivka se nazývá *semikubická parabola.*



7 Je dána křivka $k(t) = [2\cos(t) - \cos(2t)\ ;\ 2\sin(t) - \sin(2t)]$, $t \in \langle -\pi\ ;\ \pi \rangle$.

Zjistěte zda má křivka singulární body. Pokud ano, napište jejich souřadnice.

Napište obecné rovnice tečen a normál křivky v bodech $[1\ ;\ ?]$.

Řešení

Tečné vektory dané křivky mají předpis

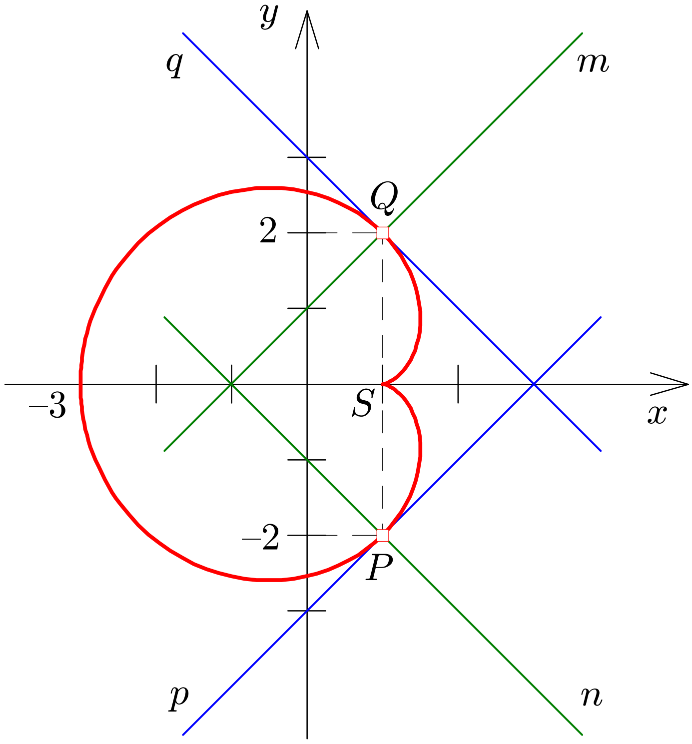
$$\begin{aligned} u(t) = \ & (-2\sin(t) + 2\sin(2t)\ ; \\ & 2\cos(t) - 2\cos(2t)),\ t \in \langle -\pi\ ;\ \pi \rangle. \end{aligned}$$

Pro určení singulárních bodů křivky musíme řešit rovnice

$$\begin{aligned} -2\sin(t) + 2\sin(2t) &= 0, \\ 2\cos(t) - 2\cos(2t) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením první rovnice na daném intervalu jsou $t \in \left\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}$.
Řešením druhé rovnice na daném intervalu jsou $t \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}$.
Společným řešením obou rovnic je pouze $t = 0$, tedy jediným singulárním bodem křivky je $S = k(0) = [1\ ;\ 0]$.

Chybějící souřadnici bodů $[1\ ;\ ?]$ dourčíme vyřešením rovnice $2\cos(t) - \cos(2t) = 1$.
Řešením jsou hodnoty $t \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$.



Tečna p křivky v bodě $P = k(-\frac{\pi}{2}) = [1\ ;\ -2]$ má rovnici $x - y - 3 = 0$, normála n v bodě P má rovnici $x + y + 1 = 0$.

Tečna q křivky v bodě $Q = k(\frac{\pi}{2}) = [1\ ;\ 2]$ má rovnici $x + y - 3 = 0$, normála m v bodě Q má rovnici $x - y + 1 = 0$.

V bodě S křivka tečnu nemá.

Poznámka: křivka se nazývá *kardioida.*

8 Je dána křivka $k(t) = [1+t\,;\,-t^2\,;\,1+t^3]$, $t \in \mathbb{R}$.

Napište rovnice tečny křivky v bodě $A = k(1)$. Dále napište rovnici roviny α, která tímto bodem prochází a je kolmá k tečně křivky v tomto bodě (tzv. *normálová rovina* křivky k v bodě $k(1)$).

Řešení

Tečné vektory křivky k mají předpis

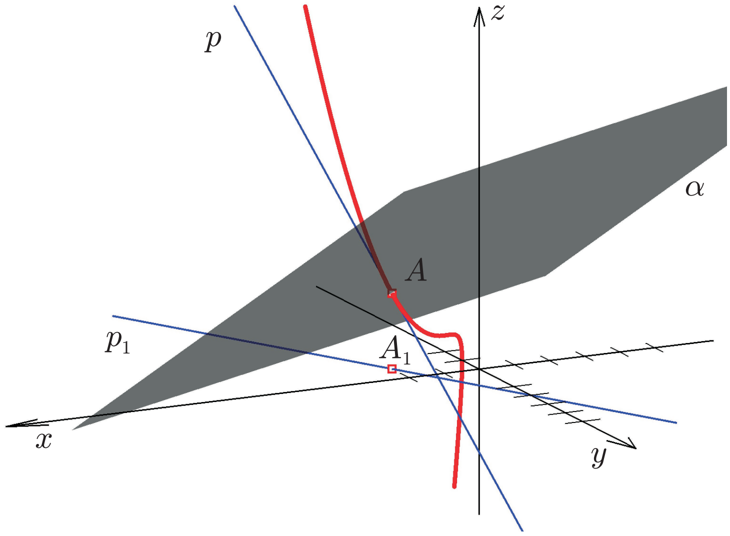
$$u(t) = (1\,;\,-2t\,;\,3t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tečna p křivky v bodě $A[2\,;\,-1\,;\,2]$ má směrový vektor $u(1) = (1\,;\,-2\,;\,3)$ a parametrický předpis:

$$\begin{aligned} p:\ x &= 2+s \\ y &= -1-2s \\ z &= 2+3s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rovina α je kolmá na přímku p, tedy směrový vektor přímky p je normálovým vektorem roviny α. Tedy lze snadno odvodit obecnou rovnici roviny α:

$$\begin{aligned} x-2y+3z+d &= 0, \\ A \in \alpha:\quad 2+2+6+d &= 0 \Rightarrow d = -10, \\ \alpha:\quad x-2y+3z-10 &= 0. \end{aligned}$$



9 Je dána křivka $k(t) = [t\,;\,t^2\,;\,e^t]$, $t \in \mathbb{R}$.

Napište rovnici normálové roviny α křivky v průsečíku křivky s osou z. Dále napište rovnice průsečnice této roviny s půdorysnou $\pi(x,y)$.

Řešení

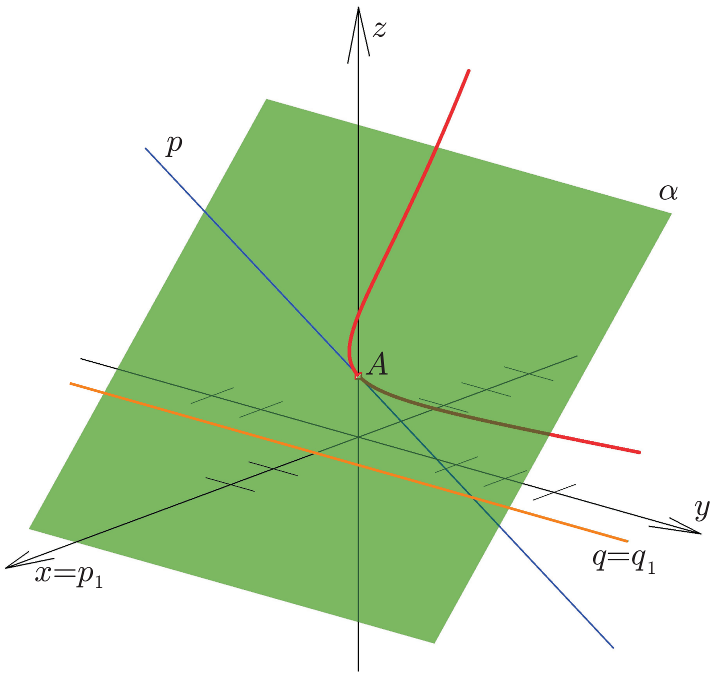
Nejdříve určíme průsečík křivky s osou z. Bod $A = k \cap z$ má souřadnice $[0\,;\,0\,;\,?]$. Z předpisu křivku je zřejmé, že to je bod $k(0) = [0\,;\,0\,;\,1]$.

Tečné vektory křivky mají předpis

$$u(t) = (1\,;\,2t\,;\,e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tečný vektor křivky v bodě A je $u(0) = (1\,;\,0\,;\,1)$ a je to zároveň normálový vektor roviny α. Odvodíme tedy obecnou rovnici normálové roviny:

$$\begin{aligned} x+z+d &= 0 \\ A \in \alpha:\quad 1+d &= 0 \Rightarrow d = -1, \\ \alpha:\quad x+z-1 &= 0 \end{aligned}$$



Dále hledáme průsečnici rovin $\alpha:\ x+z-1 = 0$ a $\pi:\ z = 0$.

Průsečnice má parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} q:\ x &= 1 \\ y &= s \\ z &= 0, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

10 Je dána křivka $k(t) = \left[\dfrac{\cos t}{1+\sin^2 t} ; \dfrac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t}\right]$, $t \in \left\langle -\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{7\pi}{4} \right\rangle$.

Určete souřadnice všech průsečíků křivky s osou x.

Napište obecné rovnice tečen křivky v těchto bodech.

Řešení

Průsečíky s osou x jsou body $P[? ; 0]$.

Pro určení příslušných hodnot parametru t řešíme rovnici

$$\frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t} = 0.$$

$$\sin t \cos t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin t = 0 \vee \cos t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Průsečíky křivky k s osou x jsou body

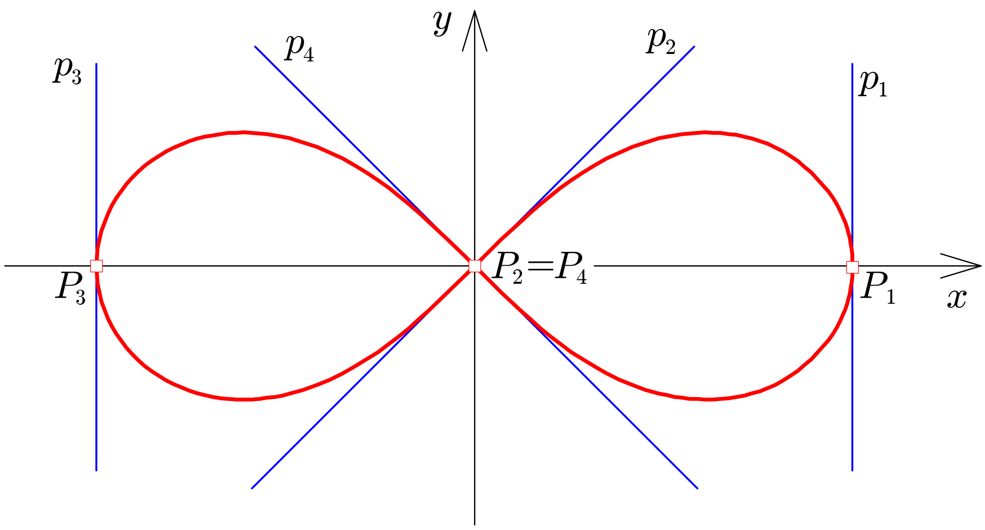
$$P_1 = k(0) = [1 ; 0],\ P_2 = k(\frac{\pi}{2}) = [0 ; 0],\ P_3 = k(\pi) = [-1 ; 0],\ P_4 = k(\frac{3\pi}{2}) = [0 ; 0].$$

Tečné vektory křivky k jsou $u(t) = \left(-\dfrac{\sin t \cdot (2+\cos^2 t)}{(1+\sin^2 t)^2} ; \dfrac{3\cos^2 t - 2}{(1+\sin^2 t)^2}\right)$, $t \in \left\langle -\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{7\pi}{4} \right\rangle$.

Obecné rovnice tečen v průsečících s osou x jsou:

$$\begin{aligned} p_1 &: x - 1 = 0, \\ p_2 &: x - y = 0, \\ p_3 &: x + 1 = 0, \\ p_4 &: x + y = 0. \end{aligned}$$

Poznámka: Křivka se nazývá *Bernoulliho lemniskata*. Obrázek <u>není součástí řešení</u> v testu.



11 Je dána křivka $k(t) = \left[t^4 \,;\, -8\,t^2 \,;\, 12 \ln t\right]$, $t \in (0 \,;\, \infty)$.

Zjistěte, ve kterých bodech má křivka k tečny rovnoběžné s rovinou $\alpha(A,B,C)$, $A[1 \,;\, 0 \,;\, 0]$, $B[0 \,;\, 1 \,;\, 0]$, $C[0 \,;\, 0 \,;\, 1]$.

Řešení

Přímka je rovnoběžná s rovinou, pokud je její směrový vektor kolmý na normálový vektor roviny. Nejprve určíme normálový vektor roviny α. Směrové vektory roviny α jsou $u = \vec{AB} = (-1 \,;\, 1 \,;\, 0)$ a $v = \vec{AC} = (-1 \,;\, 0 \,;\, 1)$. Normálový vektor roviny α je $n = u \times v \ = (1 \,;\, 1 \,;\, 1)$.

Směrové vektrou tečen křivky k jsou $u(t) = \left(4\,t^3 \,;\, -16\,t \,;\, \dfrac{12}{t}\right)$, $t \in (0 \,;\, \infty)$.

Dva nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, když je jejich skalární součin nulový, tedy řešíme rovnici

$$\begin{aligned} (1 \,;\, 1 \,;\, 1) \cdot \left(4\,t^3 \,;\, -16\,t \,;\, \frac{12}{t}\right) &= 0, \\ 4\,t^3 - 16\,t + \frac{12}{t} &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této rovnice z intervalu $(0 \,;\, \infty)$ jsou $t \in \left\{1 \,;\, \sqrt{3}\right\}$. Tedy body přivky k, ve kterých je její tečna rovnoběžná s rovinou α jsou

$$k(1) = [1 \,;\, -8 \,;\, 0] \qquad \text{a} \qquad k(\sqrt{3}) = [9 \,;\, -24 \,;\, 6 \ln(3)].$$

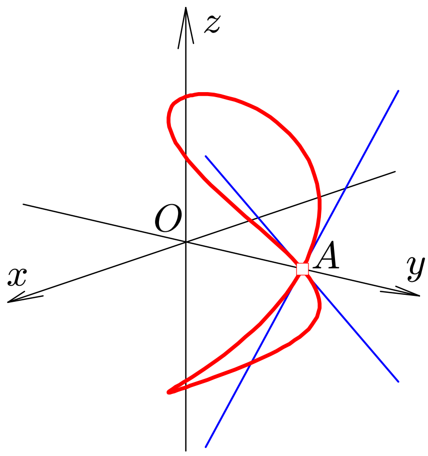
12 Je dána křivka $k(t) = [\sin(2t) \,;\, 1 - \cos(2t) \,;\, 2\cos(t)]$, $t \in \langle 0 \,;\, 2\,\pi \rangle$.

Napište souřadnice vektoru, který je kolmý k rovině určené tečnami křivky v bodě $A[0 \,;\, 2 \,;\, 0]$.

Řešení

Nejprve určíme hodnoty parametru t, pro které je $k(t) = A$. Řešíme rovnice

$$\begin{aligned} \sin(2t) &= 0, \\ 1 - \cos(2t) &= 2, \\ 2\cos(t) &= 0. \end{aligned}$$



Společným řešením těchto rovnic jsou hodnoty parametru $t \in \left\{\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Tedy bod $A = k(\frac{\pi}{2}) = k(\frac{3\pi}{2})$.

Tečné vektory křivky k jsou

$$u(t) = (2\cos(2t) \,;\, 2\sin(2t) \,;\, -2\sin(t))\,, \quad t \in \langle 0 \,;\, 2\,\pi \rangle.$$

Rovina α určená tečnami křivky k v bodě A má směrové vektory $u(\frac{\pi}{2}) = (1 \,;\, 0 \,;\, 1)$ a $u(\frac{3\pi}{2}) = (-1 \,;\, 0 \,;\, 1)$.

Vektor kolmý k rovině α je vektrovým součinem směrových vektorů tečen v bodě A:

$$n = (1 \,;\, 0 \,;\, 1) \times (-1 \,;\, 0 \,;\, 1) = (0 \,;\, -2 \,;\, 0).$$

Poznámka: Křivka se nazývá *Vivianiho okénko*. Obrázek <u>není součástí řešení</u> v testu.

13 Určete singulární body křivky $k(t) = \left[2\sin^2 t\ ;\ 2(\sin^2 t)\cdot \operatorname{tg} t\right]$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Dále určete souřadnice průsečíku tečen v bodech $[1\ ;\ ?]$.

Zjistěte, zda má křivka asymptotu. Pokud ano, napište její rovnici.

Řešení

Singulární body křivky jsou takové body, ve kterých je tečný vektor křivky buď nulový, nebo neexistuje.

Tečné vektory křivky k jsou

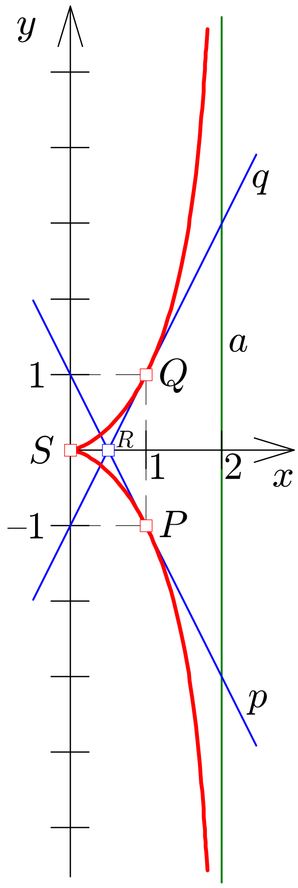
$$u(t) = \left(4\sin t\cos t\ ;\ \frac{2(\sin^2 t)(2\cos^2 t+1)}{\cos^2 t}\right), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Řešíme tedy rovnice: $4\sin t\cos t = 0$ a $\frac{2(\sin^2 t)(2\cos^2 t+1)}{\cos^2 t} = 0$.

Řešením obou rovnic na daném intervalu je jediná hodnota parametru $t = 0$. Jediným singulárním bodem křivky k je tedy bod $S = k(0) = [0\ ;\ 0]$.

Body s x-ovou souřadnicí 1 zjistíme vyřešením rovnice $2\sin^2 t = 1$. Řešením jsou hodnoty parametru $t \in \left\{-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right\}$. Hledané body jsou tedy

$$P = k(-\tfrac{\pi}{4}) = [1\ ;\ -1] \qquad \text{a} \qquad Q = k(\tfrac{\pi}{4}) = [1\ ;\ 1].$$



Tečna p křivky k v bodě $P[1\ ;\ -1]$ má směrový vektor $u(-\frac{\pi}{4}) = (-1\ ;\ 2)$ a parametrický předpis

$$\begin{aligned} p:\ x &= 1 - s \\ y &= -1 + 2s, \qquad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tečna q křivky k v bodě $Q[1\ ;\ 1]$ má směrový vektor $u(\frac{\pi}{4}) = (1\ ;\ 2)$ a parametrický předpis

$$\begin{aligned} q:\ x &= 1 + r \\ y &= 1 + 2r, \qquad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Průsečíkem tečen p a Q je bod $R[\frac{1}{2}\ ;\ 0]$.

Pro určení existence asymptoty řešíme limity souřadnicových funkcí:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} 2\sin^2 t = 2 \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} 2(\sin^2 t)\cdot\operatorname{tg} t = -\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} 2\sin^2 t = 2 \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} 2(\sin^2 t)\cdot\operatorname{tg} t = +\infty$$

Asymptotou křivky k je přímka a: $x = 2$.

Poznámka: Křivka se nazývá *Dioklova kisoida*. Obrázek <u>není součástí řešení</u> v testu.